MATEMATICĂ

Teste rezolvate Bacalaureat

Specializări:

- matematică-informatică
- științe ale naturii
- tehnologic

Portal ÎNVĂȚĂMÂNT
www.portalinvatamant.ro

Cuprins

TESTE

✓M_mate-info

✓M_șt-nat

✓M_tehnologic

TEST 1 (M_mate-info)

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{-1+x}{3}$. Calculaţi $f(-3) \cdot f(-2) \cdot \ldots \cdot f(3)$.
2) Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_3(2x - 3955) = 4$.
3) Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi inecuaţia: $x^2 - x - 10 < 2$.
4) Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $M = \{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots, \sqrt[3]{100}\}$, acesta să fie iraţional.
5) Fie punctele $A(-3, 0), B(0, -4)$. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$.
6) Se consideră triunghiul ABC cu $B = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{6}$. Să se calculeze $\cos B$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1) Se consideră matricele $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & lgx & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}, x > 0$.
   a) Să se calculeze $\det(M(x))$, $\forall x > 0$.
   b) Să se arate că $M(x) \cdot M(y) = M(xy), \forall x, y > 0$.
   c) Să se calculeze $M(1) + M(2) + \cdots + M(2018)$.
2) Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$.
   a) Să se calculeze produsul elementelor inversabile în raport cu înmulţirea din inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$.
   b) Să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ ecuaţia $\hat{4}x + \hat{2} = \hat{6}$.
   c) Să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ sistemul $\begin{cases} x + y = \hat{2} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{5} \end{cases}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \geq 0 \\ 2^x + 2017, & x < 0 \end{cases}$ unde $\in \mathbb{R}$.
   a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie continuă în $x_0 = 0$.
   b) Să searate că funcţia f' este crescătoare pe $(0; \infty), \forall a \in \mathbb{R}$.
   c) Să se calculeze $\lim_{x \to -\infty}((f(x) - 2017) \cdot x)$.
2) Se consideră funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+2}$.
   a) Să se calculeze $\int f^2(x)dx$.
   b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$.
   c) Folosind eventual faptul că $\sqrt{x+2} \leq \sqrt{3}$, $\forall x \in [0,1]$, să se arate că $\int_0^1 x^{2017} f(x)dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2018}$.

TEST 24 (M_șt-nat)

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1) Să se determine al treisprezecelea termen al şirului 1,6,11,16, ...
2) Care este probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $\{10,11,12,\ldots\ldots,99\}$, acesta să fie divizibil cu 5?
3) Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{5x-6}=x$.
4) Se consideră funcţia f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-1$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$.
5) Să se determine ecuaţia dreptei ce trece prin punctele $A(-1,2)$ şi $B(3,0)$.
6) Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AB=\sqrt{3}, AC=\sqrt{6}, m(\sphericalangle A)=45°$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1) Se consideră determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3-4x=0$.
   a) Să se calculeze $x_1+x_2+x_3$.
   b) Să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3$.
   c) Să se calculeze valoarea determinantului Δ.
2) Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x\circ y=xy-3(x+y)+12$.
   a) Să se arate că $x\circ y=(x-3)(y-3)+3, \forall x,y\in\mathbb{R}$.
   b) Să se demonstreze că $x\circ 3=3, \forall x\in\mathbb{R}$.
   c) Ştiind că legea de compoziţie " $\circ$ " este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei $E=(-2018)\circ(-2017)\circ\ldots\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ\ldots\circ 2018$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=xe^x$.
   a) Să se determine punctul de extrem al funcţiei f.
   b) Să se determine ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
   c) Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x}{x^2}$.
2) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+e^x$.
   a) Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
   b) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.
   c) Să se calculeze $\int_1^e \frac{f(lnx)}{x}dx$.

TEST 45 (M_tehnologic)

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1) Să se demonstreze că numărul $\sqrt[3]{64} + 2^{\log_2 1} + \log_3 \frac{1}{9}$ este natural.
2) Ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - 2018x + 1 = 0$, să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.
3) Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $ln^2x - 2lnx - 3 = 0$.
4) După o reducere a preţului cu 30%, un produs costă $1412{,}6$ lei. Să se calculeze preţul iniţial al produsului.
5) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,-5)$ şi $B(6,1)$. Să se determine coordonatele punctului C, ştiind că B este mijlocul segmentului AC.
6) În triunghiul ABC, $AC = 5\sqrt{3}$, iar lungimea razei cercului circumscris triunghiului este egală cu 5. Să se calculeze $\sin B$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1) Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   a) Să se calculeze A^2.
   b) Să se arate că $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
   c) Să se determine transpusa matricei $B = A + A^2 + \cdots + A^{2018}$.
2) Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie asociativă
$$x * y = xy - 5(x + y) + 30$$
   a) Să se arate că $x * y = (x - 5)(y - 5) + 5, \forall x, y \in \mathbb{R}$
   b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x * x * x = x$.
   c) Să se calculeze $1 * 2 * 3 * \ldots * 2018$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

2) Se consideră funcţia $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$.
   a) Să se calculeze $f'\left(\frac{e^2}{2}\right)$.
   b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale la graficul funcţiei f.
   c) Arătaţi că $\frac{2}{e} \geq f(x), \forall x \in (0, \infty)$.
2) Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, f(x) = \begin{cases} e^x, x \leq 0 \\ 1 - x, x > 0 \end{cases}$
   a) Să se arate că funcţia f admite primitive.
   b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe $(-\infty; 0)$.
   c) Să se calculeze $\int_{-1}^{2} f(x)dx$.

REZOLVĂRI TESTE

✓M_mate-info

✓M_șt-nat

✓M_tehnologic

Rezolvare Test 1 (M_mate-info)

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1) $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1+x}{3} = 0 \Rightarrow -1 + x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow$

$$f(-3) \cdot f(-2) \cdot \ldots \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) = 0$$

2) Avem condiţia de existenţă : $2x - 3955 > 0 \Rightarrow 2x > 3955 \Rightarrow x > 1977{,}5 \Rightarrow$

$x \in (1977{,}5; \infty)$. Din $\log_3(2x - 3955) = 4 \Rightarrow 2x - 3955 = 3^4 \Rightarrow 2x = 81 + 3955 \Rightarrow$

$2x = 4036 \Rightarrow x = 2018 \in (1977{,}5; \infty) \Rightarrow S = \{2018\}$.

3) $x^2 - x - 10 < 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 < 0$. Ecuaţia $x^2 - x - 12 = 0$ are soluţiile

$x_1 = -3\,, x_2 = 4$. Din tabelul de semne obţinem $\in (-3; 4)$, cum
$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\} \Rightarrow S = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

4) Cuburi perfecte mai mici decât 100 sunt: $1^3 = 1, 2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64$. Deci din

mulţimea$M = \{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \ldots, \sqrt[3]{100}\}$numere raţionale sunt $\sqrt[3]{1} = 1, \sqrt[3]{8} = 2, \sqrt[3]{27} = 3, \sqrt[3]{64} = 4$
(deci 4 numere raţionale) ⇒ cazuri favorabile vor fi 100 - 4=96 (numere iraţionale) .

$probabilitatea = \frac{număr\ cazuri\ favorabile}{număr\ cazuri\ posibile} = \frac{96}{100} = 0{,}96\ sau\ 96\%$.

5) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

6) Din teorema cosinusului $\cos B = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC} = \frac{3+6-2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = \frac{7}{6\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{12}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1) a)$\det(M(x)) = \begin{vmatrix} 1 & lgx & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot x = x$ (ceilalţi termeni ai dezvoltării sunt toţi nuli)

b) $M(x) \cdot M(y) = \begin{pmatrix} 1 & lgx & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & lgy & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & lgx + lgy & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & lgxy & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix} = M(xy), \forall\, x, y > 0.$

c) $M(1) + M(2) + \cdots + M(2018) = \begin{pmatrix} 1 & lg1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & lg2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \cdots +$

$\begin{pmatrix} 1 & lg2018 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2018 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \underbrace{1+1+\cdots+1}_{de\ 2018\ ori} & lg1+lg2+\cdots+lg2018 & 0 \\ 0 & \underbrace{1+1+\cdots+1}_{de\ 2018\ ori} & 0 \\ 0 & 0 & 1+2+\cdots+2018 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2018 & \lg(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2018) & 0 \\ 0 & 2018 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2018\cdot 2019}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2018 & \lg(2018!) & 0 \\ 0 & 2018 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2018\cdot 2019}{2} \end{pmatrix}.$$

2) a) Mulţimea elementelor inversabile este: $U(\mathbb{Z}_{12}) = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \widehat{11}\}$ (un element $\hat{a}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_{12} \Leftrightarrow (a, 12) = 1$)$\Rightarrow \hat{1}\cdot\hat{5}\cdot\hat{7}\cdot\widehat{11} = \hat{1}$.

b) $\hat{4}x + \hat{2} = \hat{6}, x \in \mathbb{Z}_{12} \Leftrightarrow \hat{4}x + \hat{2} + \widehat{10} = \hat{6} + \widehat{10} \Leftrightarrow \hat{4}x = \hat{4} \Rightarrow x \in \{\hat{1}, \hat{4}, \hat{7}, \widehat{10}\}$.

c) $\begin{cases} x + y = \hat{2} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{5} \end{cases}$. Pentru a reduce necunoscuta y înmulţim prima ecuaţie cu $-\hat{3} = \widehat{12-3} = \hat{9}$ în $\mathbb{Z}_{12}\begin{cases} x + y = \hat{2} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{9}x + \hat{9}y = \hat{6} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{5} \end{cases}$ adunând cele două ecuaţii obţinem $\widehat{11}x = \widehat{11} \Rightarrow$

$x \in \{\hat{1}\}$. Pentru $x = \hat{1}$ prima ecuaţie din sistem devine $\hat{1} + y = \hat{2} \Rightarrow y = \hat{1}$ (1)

Pentru $x = \hat{1}$ a doua ecuaţie din sistem devine $\hat{2} + \hat{3}y = \hat{5} \Rightarrow \hat{3}y = \hat{3} \Rightarrow y \in \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{9}\}$ (2)

Din (1) şi (2) ⇒ soluţia sistemului este $S = \{(\hat{1}, \hat{1})\}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1) a) f este continuă în $x_0 = 0 \Leftrightarrow l_s(0) = l_d(0) = f(0)$.

$l_s(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(2^x + 2017) = 2018$; $l_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x^2 + a) = a$;

$$f(0) = a \Rightarrow a = 2018$$

c) Pentru $x > 0 \Rightarrow f'(x) = (x^2 + a)' = 2x \Rightarrow f''(x) = (2x)' = 2 > 0, \forall x > 0, \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow$

f' este crescătoare pe $(0; \infty), \forall a \in \mathbb{R}$

c) $\lim_{x\to-\infty}((f(x) - 2017)\cdot x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2^x\cdot x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2^{-x}} = 0$.

2) a)$\int f^2(x)dx = \int \sqrt{x+2}^2 dx = \int (x+2)dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C$.

b) $A = \int_0^1 |f(x)|dx$. Cum $f(x) = \sqrt{x+2} > 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow |f(x)| = f(x)$ pentru

$x \in [0,1] \Rightarrow A = \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x+2}\,dx = \int_0^1 (x+2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}\,\Big|_0^1 = \frac{6\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{6\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{3}$.

c) Deoarece $\sqrt{x+2} \leq \sqrt{3}$, $\forall\, x \in [0,1] \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{3}$, $\forall\, x \in [0,1] \Rightarrow$

$$x^{2017}f(x) \leq x^{2017}\sqrt{3}\,,\ \forall\, x \in [0,1] \Rightarrow \int_0^1 x^{2017}f(x)dx \leq \int_0^1 x^{2017}\sqrt{3}dx = \sqrt{3}\int_0^1 x^{2017}dx$$

$$= \sqrt{3}\cdot\frac{x^{2018}}{2018}\Big|_0^1 = \sqrt{3}\ \cdot\left(\frac{1^{2018}}{2018}-\frac{0^{2018}}{2018}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2018} \Rightarrow \int_0^1 x^{2017}f(x)dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2018}$$

Rezolvare Test 24 (M_șt-nat)

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Şirul este o progresie aritmetică $(a_n)_n$ cu primul termen $a_1 = 1$ şi raţia
$$r = a_{n+1} - a_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow r = 6 - 1 = 11 - 6 = 16 - 11 = \cdots = 5$$
$$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow \ a_{13} = a_1 + 12r = 1 + 12 \cdot 5 = 61$$
2. Mulțimea are $99 - 9 = 90$ elemente (90 cazuri posibile). Dintre acestea, divizibile cu 5 sunt numerele care au ultima cifră 0 sau 5, adică $\{10,15, \dots, 95\}$ (sau $5 \cdot 2, 5 \cdot 3, \dots,$

$5 \cdot 19$, de la 2 la 19 sunt 18 numere), deci 18 cazuri favorabile. $probabilitatea = \frac{număr\ cazuri\ favorabile}{număr\ cazuri\ posibile} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}\ sau\ 0{,}2\ sau\ 20\%$.

3. Condiţii de existenţă: $5x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{6}{5} \Rightarrow x \in [\frac{6}{5}; \infty)$ şi $x \geq 0 \Rightarrow x \in [0; \infty)$ (această condiţie apare din faptul că membrul stâng e pozitiv, deci şi membrul drept trebuie să fie pozitiv) $\Rightarrow x \in [\frac{6}{5}; \infty) \cap [0; \infty) \Rightarrow x \in [\frac{6}{5}; \infty)$. Ridicând la pătrat ecuaţia devine : $5x - 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$, cu soluţiile $x_1 = 2 \in [\frac{6}{5}; \infty)$, $x_2 = 3 \in [\frac{6}{5}; \infty)$
$$\Rightarrow S = \{2; 3\}$$
4. $f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$; $f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$; $f(3) = 3 \cdot 3 - 1 = 8 \dots \dots \dots \dots$
$$f(10) = 3 \cdot 10 - 1 = 29 \Rightarrow$$
$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) = 2 + 5 + 8 + \cdots + 29 = \frac{(2+29)10}{2} = 31 \cdot 5 =$$
$$= 155$$
5. Ecuaţia derptei ce trece prin punctele $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$ este:
$$AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow AB : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$$AB : 2x + 3y - 0 - 6 + y - 0 = 0 \Rightarrow AB : 2x + 4y - 6 = 0 \Rightarrow$$
$$AB : x + 2y - 3 = 0.$$
6. $A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sin 45°}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{3}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{0}{1} = 0$ (din relaţiile lui Viete)

sau $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 + 2 + (-2) = 0$.

b) Orice soluţie verifică ecuaţia din care provine

$\Rightarrow \ x_1^3 - 4x_1 = 0$; $x_2^3 - 4x_2 = 0$; $x_3^3 - 4x_3 = 0$. Adunând cele trei relaţii obţinem:

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 4(x_1 + x_2 + x_3) = 0$. Folosind punctual a)$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$.

c) $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_2 & x_2 & x_3 \\ x_1 + x_2 + x_2 & x_3 & x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_1 + x_2 + x_2)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1 & x_3 & x_1 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0$ (conform punctului a)).

2) a) "$\Rightarrow$"$x \circ y = xy - 3(x + y) + 12 = xy - 3x - 3y + 12 = x(y - 3) - 3y + 9 + 3 = x(y - 3) - 3(y - 3) + 3 = (y - 3)(x - 3) + 3 = (x - 3)(y - 3) + 3$

"$\Leftarrow$" $(x - 3)(y - 3) + 3 = xy - 3x - 3y + 9 + 3 = xy - 3(x + y) + 12 = x \circ y$

b) $x \circ 3 = (x - 3)(3 - 3) + 3 = (x - 3) \cdot 0 + 3 = 3\,, \forall x \in \mathbb{R}$ (am folosit punctul a))

c) $3 \circ y = (3 - 3)(y - 3) + 3 = 0 \cdot (y - 3) + 3 = 3\,, \forall y \in \mathbb{R}$. Ştiind că legea de compoziţie " $\circ$ " este asociativă şi folosind $x \circ 3 = 3\,, \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ 3 \circ y = 3\,, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$E = (-2018) \circ (-2017) \circ \dots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ \dots \circ 2018 =$
$= \underbrace{(-2018) \circ (-2017) \circ \dots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2}_{x} \circ 3 \circ \underbrace{4 \circ 5 \circ \dots \circ 2018}_{y} = (x \circ 3) \circ y = 3 \circ y =$
$3, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x) = (xe^x)' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (x + 1)e^x$. Ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţia $x = -1, f(-1) = -\frac{1}{e}$. Deoarece pentru $x < -1, f'(x) < 0$, iar dacă $x > -1$, $f'(x) > 0$, punctul de coordonate $\left(-1; -\frac{1}{e}\right)$ este punct de minim.

   b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0 \Rightarrow y = 0$ este ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$.

   c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x) - x}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{xe^x - x}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x(e^x - 1)}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x - 1}{x} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$.

2) a) Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f $\Rightarrow F'(x) = f(x) = x^2 + e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

F este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) $\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x(x^2 + e^x)dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 xe^x dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + e^x(x - 1)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$.

$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x(e^x)' dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 x' \cdot e^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1$$
$$= e^x(x - 1)\Big|_0^1 = e(1 - 1) - e^0(0 - 1) = 1$$

c) Efectuând schimbarea de variabilă $= \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$. Pentru $x = 1 \Rightarrow t = \ln 1 = 0$, pentru $x = e \Rightarrow t = \ln e = 1$. Din teorema de schimbare de variabilă deducem că $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx =$ $= \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (t^2 + e^t)dt = (\frac{t^3}{3} + e^t)\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} + e\right) - \left(\frac{0}{3} + e^0\right) = \frac{1}{3} + e - 1 = \frac{3e-2}{3}$.

Rezolvare Test 45 (M_tehnologic)

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$; $2^{\log_2 1} = 1$;$\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2 \Rightarrow$
   $\sqrt[3]{64} + 2^{\log_2 1} + \log_3 \frac{1}{9} = 4 + 1 - 2 = 3 \in \mathbb{N}$.
2. x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - 2018x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{-2018}{1} = 2018$ şi $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{1} = 1$ (relaţiile lui Viete). $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{2018}{1} = 2018$.
3. Avem condiţia de existenţă: $x > 0 \Rightarrow x \in (0;\infty)$. Notăm $lnx = y$
   $\Rightarrow ln^2x - 2lnx - 3 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 \Rightarrow y_1 = -1, y_2 = 3 \Rightarrow$
   $lnx = -1 \Rightarrow x_1 = e^{-1} = \frac{1}{e} \in (0;\infty)$, $lnx = 3 \Rightarrow x_1 = e^3 \in (0;\infty) \Rightarrow S = \{\frac{1}{e}; e^3\}$.
4. $x = preţul\ iniţial\ al\ produsului \Rightarrow x - \frac{30}{100} \cdot x = 1412{,}6 \Rightarrow \frac{70}{100} \cdot x = 1412{,}6 \Rightarrow$
   $x = \frac{1412{,}6 \cdot 100}{70} \Rightarrow x = 2018\ lei$.
5. B mijlocul segmentului $AC, x_B = \frac{x_A+x_C}{2} \Rightarrow 6 = \frac{-2+x_C}{2} \Rightarrow x_C - 2 = 12 \Rightarrow x_C = 14$,
   $y_B = \frac{y_A+y_C}{2} \Rightarrow 1 = \frac{-5+y_C}{2} \Rightarrow y_C - 5 = 2 \Rightarrow y_C = 7 \Rightarrow C(14, 7)$.
6. Din teorema sinusului avem $\frac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow \sin B = \frac{AC}{2R} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   b) Fie propoziţia $P(n)$: $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, demonstrăm prin inducţie matematică:

Verificare $P(2)$: $A^2 = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ adevărat conform punctului a).

Presupunem $P(k)$ adevărat, adică $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, şi demonstrăm $P(k+1)$,

adică $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 3^{k+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{k+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(k+1)$ adevărat $\forall\, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$

$pentru$ că $ambele\ etape\ sunt\ verificate \Rightarrow P(n)$ adevărat $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow$

$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

c) $B = A + A^2 + \cdots + A^{2018} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 3^{2018} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 3 + 3^2 + \cdots + 3^{2018} & 0 \\ 0 & \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{de\ 2018\ ori} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{3^{2018}-1}{3-1} & 0 \\ 0 & 2018 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot (3^{2018} - 1) & 0 \\ 0 & 2018 \end{pmatrix}$

$B^t = B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot (3^{2018} - 1) & 0 \\ 0 & 2018 \end{pmatrix}$.

(pentru suma $3 + 3^2 + \cdots + 3^{2018} = 3 \cdot \frac{3^{2018}-1}{3-1} = \frac{3}{2} \cdot (3^{2018} - 1)$ am folosit formula

$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$ de la progresia geometrică)

2. a) $" \Rightarrow " x * y = xy - 5(x + y) + 30 = xy - 5x - 5y + 30 = x(y - 5) - 5(y - 5) +$
$+5 = (y - 5)(x - 5) + 5 = (x - 5)(y - 5) + 5$

$" \Leftarrow "\ (x - 5)(y - 5) + 5 = xy - 5x - 5y + 30 = xy - 5(x + y) + 30 = x * y$

b) $x * x = (x - 5)(x - 5) + 5 = (x - 5)^2 + 5$

$x * x * x = (x * x) * x = [(x - 5)^2 + 5] * x = [(x - 5)^2 + 5 - 5](x - 5) + 5 =$

$= (x - 5)^3 + 5 \Rightarrow x * x * x = x \Leftrightarrow (x - 5)^3 + 5 = x$

$\Leftrightarrow (x - 5)^3 - (x - 5) = 0 \Leftrightarrow (x - 5)[(x - 5)^2 - 1] = 0$

$\Leftrightarrow (x - 5)(x - 5 - 1)(x - 5 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x - 5)(x - 6) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 4\, , x_2 = 5, x_3 = 6 \Rightarrow S = \{4; 5; 6\}$

c) $x * 5 = (x - 5)(5 - 5) + 5 \Rightarrow x * 5 = 5, \forall x \in \mathbb{R}$ (1);

$5 * y = (5 - 5)(y - 5) + 5 \Rightarrow 5 * y = 5, \forall y \in \mathbb{R}$ (2);

Legea *este asociativă (3). Folosind (1), (2) şi (3) ⇒

$1 * 2 * 3 * \ldots * 2018 = \underbrace{(1 * 2 * 3 * 4)}_{x} * 5 * \underbrace{(6 * 7 * \ldots * 2018)}_{y} = x * 5 * y =$

$(x * 5) * y = 5 * y = 5, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x) = \left(\frac{\ln(2x)}{x}\right)' = \frac{(ln2x)' \cdot x - x' \cdot ln2x}{x^2} = \frac{1 - ln2x}{x^2}$;

$f'\left(\frac{e^2}{2}\right) = \frac{1 - \ln(2 \cdot \frac{e^2}{2})}{(\frac{e^2}{2})^2} = \frac{1-2}{(\frac{e^2}{2})^2} = \frac{-1}{\frac{e^4}{4}} = -\frac{4}{e^4}$.

b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{ln2x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{2x} = 0 \Rightarrow y = 0$ este ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{e}{2}$ deci $\frac{e}{2}$ este punct de maxim$\Rightarrow f\left(\frac{e}{2}\right)$ este valoarea maximă a funcţiei f
$\Rightarrow f\left(\frac{e}{2}\right) \geq f(x), \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow \frac{2}{e} \geq f(x), \forall x \in (0, \infty)$

2) a) Pe $(-\infty; 0)$ f este continuă (funcţie elementară exponenţială), pe $(0; \infty)$ f este continuă (funcţie elementară polinomială). Studiem continuitatea în 0:

$$l_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^x = e^0 = 1, f(0) = e^0 = 1; l_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1-x) = 1 - 0 = 1 \Rightarrow$$

$l_s(0) = l_d(0) = f(0) \Rightarrow$ f este continuă în 0$\Rightarrow$ f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow$ f admite primitive.

b) Fie F o primitivă a funcţiei f pe $(-\infty; 0) \Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in (-\infty; 0)$

$\Rightarrow F''(x) = f'(x), \forall x \in (-\infty; 0) \Rightarrow F''(x) = f'(x) = (e^x)' = e^x > 0, \forall x \in (-\infty; 0) \Rightarrow$ F este convexă pe $(-\infty; 0)$

c) $\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{0} e^x dx + \int_{0}^{2}(1-x)dx = e^x\Big|_{-1}^{0} + x\Big|_{0}^{2} - \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} =$
$e^0 - e^{-1} + 2 - 0 - \frac{2^2}{2} + \frac{0^2}{2} = 1 - \frac{1}{e} + 2 - 2 = \frac{e-1}{e}.$